第一章 矢量分析

即数学中的“场论”

主要内容：

§1.1 基本概念

场的定义：

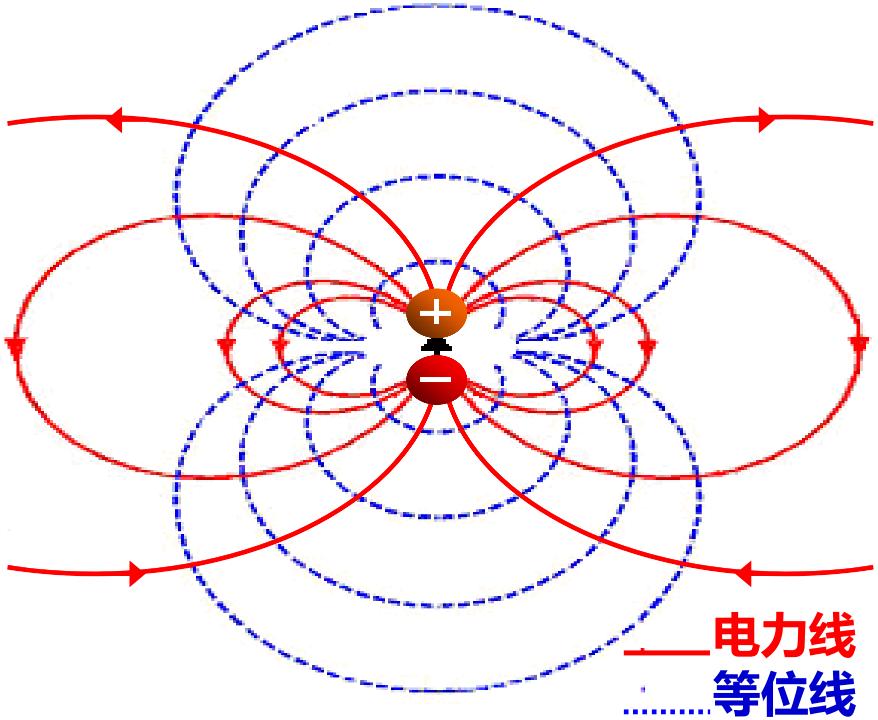
一个物理量或数学量在空间的分布称为该物理量或数学量的场。即：若对空间某一区域内的任意点，都有某个物理量或数学量的一个确定值与之对应，则称该区域内确定了该物理量或数学量的一个场。

数学上，场 ⟺ 函数（自变量为空间坐标）

场
- 标量场（Scalar Field）
- 矢量场（Vector Field）

备注：场可随时间变化，但数学中的场论仅研究其随空间的变化。

§1.1 基本概念



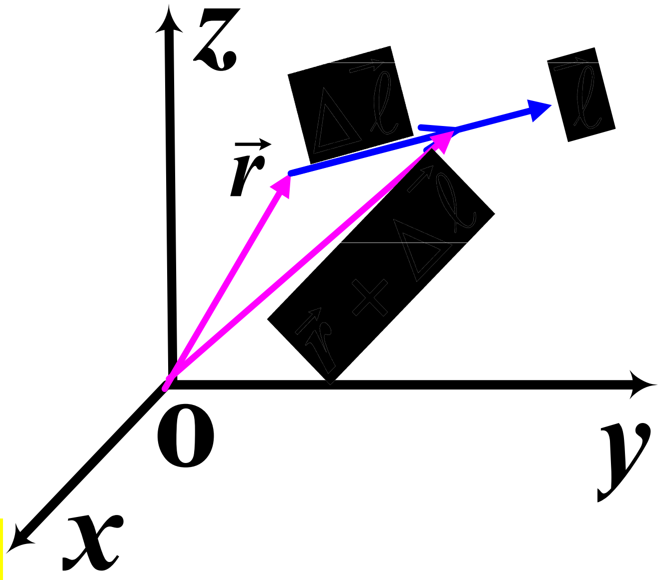
电偶极子的静电场

水流流速场

§1.1 基本概念

一、标量场$\varphi(\vec{r})=\varphi(x,y,z)$

方向导数：标量场$\varphi(\vec{r})$在某点$\vec{r}$沿某一方向$\hat{\ell}$的方向导数定义为该场在该点沿该方向对空间距离的变化率。



$$\frac{\partial\varphi}{\partial\ell}=\lim_{\Delta\ell\to 0}\frac{\varphi(\vec{r}+\Delta\vec{\ell})-\varphi(\vec{r})}{\Delta\ell}$$

$$=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos\gamma$$

其中，$\cos\alpha$、$\cos\beta$及$\cos\gamma$为$\hat{\ell}$的方向余弦，即$\hat{\ell}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

§1.1 基本概念

梯 度：标量场在某点的梯度为一矢量。其大小等于该点所有方向导数的最大值，其方向为取得该最大值的方向。

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \ell} = \mathrm{grad}\varphi \cdot \hat{\ell} = \left|\mathrm{grad}\varphi\right| \cos(\mathrm{grad}\varphi与\hat{\ell}的夹角)$$

其中， $\mathrm{grad}\varphi$ 即为梯度：

$$\mathrm{grad}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\hat{z} = \nabla\varphi$$

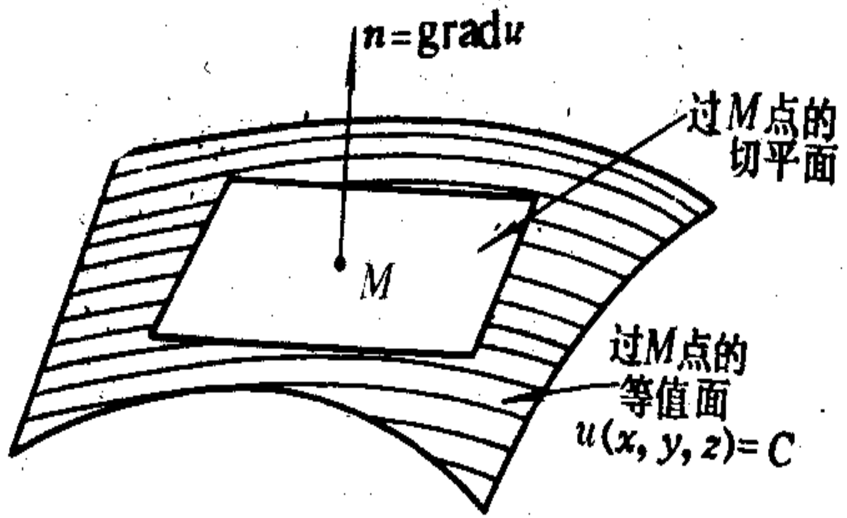
gradient　　　　Nabla或Hamilton算子, 读作“del”

标量场梯度的性质

（1）标量场沿任一方向的方向导数等于梯度在该方向的投影。

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \ell} = \mathrm{grad}\varphi \cdot \hat{\ell} = \nabla \varphi \cdot \hat{\ell}$$

（2）标量场在任一点的梯度垂直于过该点的等值面，且指向场增大的一方。（备注：等值面的法向有两个）



等值面： $\varphi(\vec{r}) = $ 常数

标量场梯度的性质

（3）一个标量场的梯度确定，则该标量场也随之确定，最多相差一个任意常数。

对场的描述

标量场 ⟷ 其梯度场

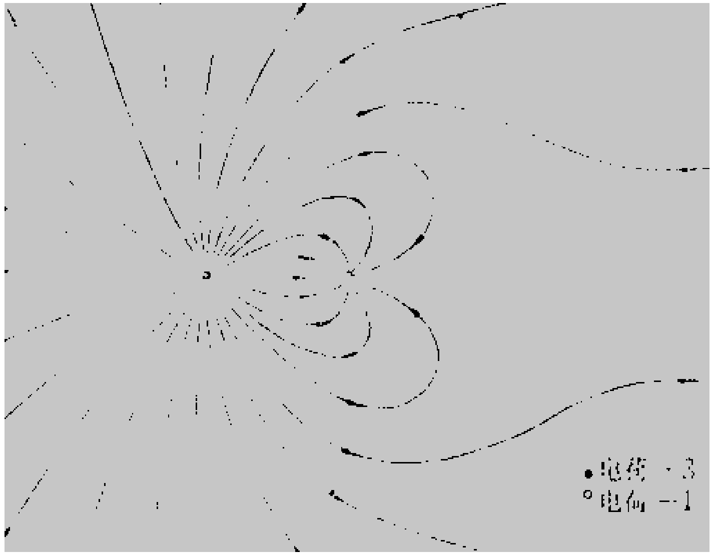
对一个标量场，可直接研究该标量场，亦可研究其梯度场；
对一个矢量场，若其可表为一个标量场的梯度，则通常研究此标量场较为方便。

§1.1 基本概念

二、矢量场 $\vec{A}(\vec{r})=\vec{A}(x,y,z)$

1、矢量场的矢量线表示

矢量线是这样一些曲线：线上任意一点的切线方向代表该点的矢量场的方向，矢量线的密度表示该点场的大小，即垂直于矢量的单位表面所穿过的矢量线个数代表该矢量的大小。

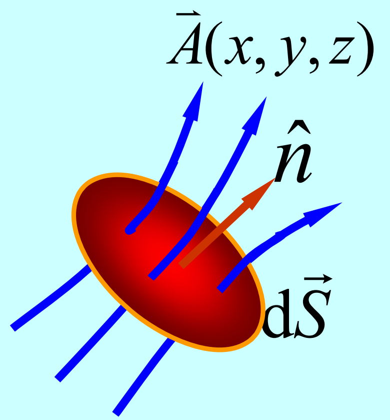


2、矢量场的通量和散度

① 通量

$$\Phi=\int_S \vec{A}\cdot d\vec{S}=\int_S \vec{A}\cdot\hat{n}dS$$

可见，通量为一代数量。其正负与矢量场方向和面积元法线的夹角有关。矢量场在曲面**S**上的通量可看作穿过**S**面的（净）矢量线数目。



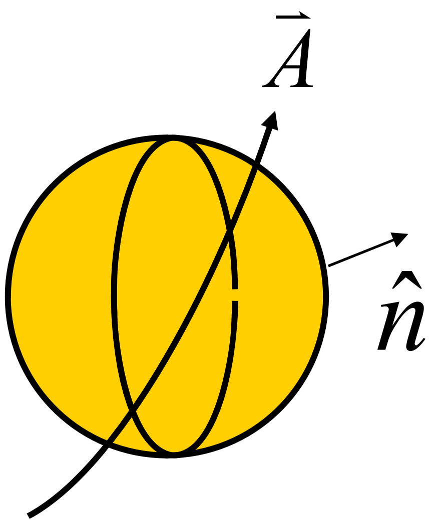
面积元矢量

2、矢量场的通量和散度

例：水流流速场及其通量。

米/秒　　　　流量，立方米/秒

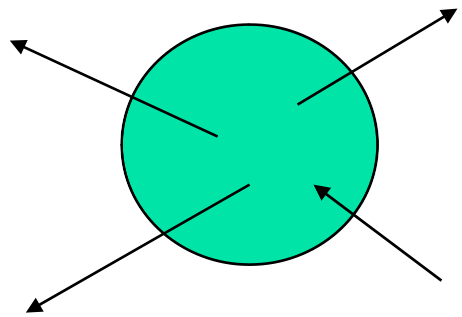
- 如果S是一闭合曲面，若无特别交代，则约定S的法向量由闭合曲面内指向闭合曲面外，即为外法向。



$$\Phi = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_S \vec{A} \cdot \hat{n} dS$$

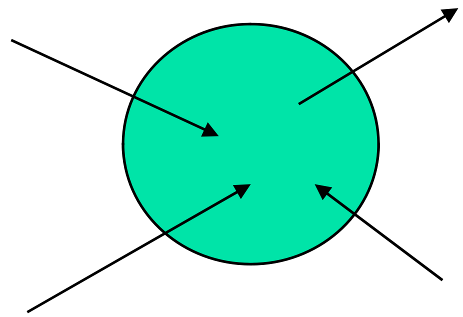
2、矢量场的通量和散度

（Ⅰ）$\Phi > 0$



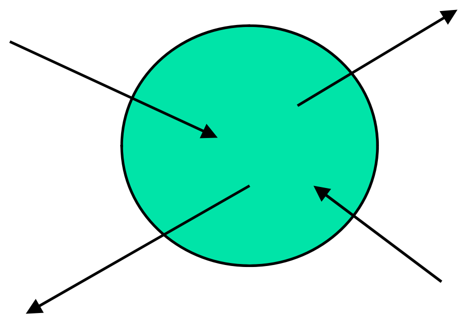
表示有净的矢量线从S内流出。S内必有发出矢量线的源或正源。

（Ⅱ）$\Phi < 0$



表示有净的矢量线流入S。S内必有收集矢量线的汇或负源。

（Ⅲ）$\Phi = 0$



表示没有矢量线出入S或流出和流入S的矢量线数目相等。无源或正负源代数和为零。

2、矢量场的通量和散度

这种能发出或汇集矢量线的源称为通量源。对应的场称为具有通量源的场，简称通量场。

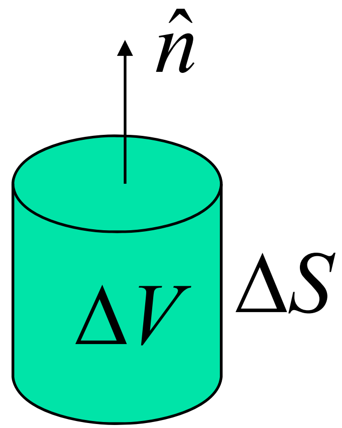
② 散度

- 矢量场在某点的散度定义为矢量场在该点单位体积表面的通量。

$$div\vec{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_{\Delta S} \vec{A} \cdot d\vec{S}}{\Delta V}$$

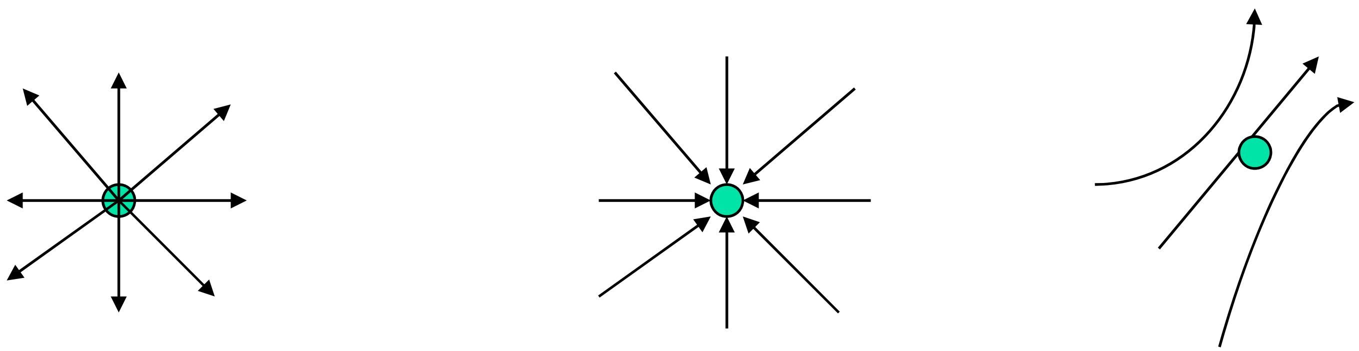
divergence

$$= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{A}$$



2、矢量场的通量和散度

散度是空间坐标的函数，表示空间各点的通量源密度。



$div\vec{A} > 0$　　　　$div\vec{A} < 0$　　　　$div\vec{A} = 0$

2、矢量场的通量和散度

③ Gauss散度定理

$$\int_V \nabla \cdot \vec{A} dV = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

若令V为$\Delta V \to 0$ $\Longrightarrow$ $\nabla \cdot \vec{A}\,\Delta V \approx \oint_{\Delta S} \vec{A} \cdot d\vec{S}$

$$\Longrightarrow \nabla \cdot \vec{A} \approx \frac{\oint_{\Delta S} \vec{A} \cdot d\vec{S}}{\Delta V}$$

因此，**Gauss**定理实际上是将任意点的散度定义所规定的散度与通量的关系推广至任意区域。

2、矢量场的通量和散度

【证】：

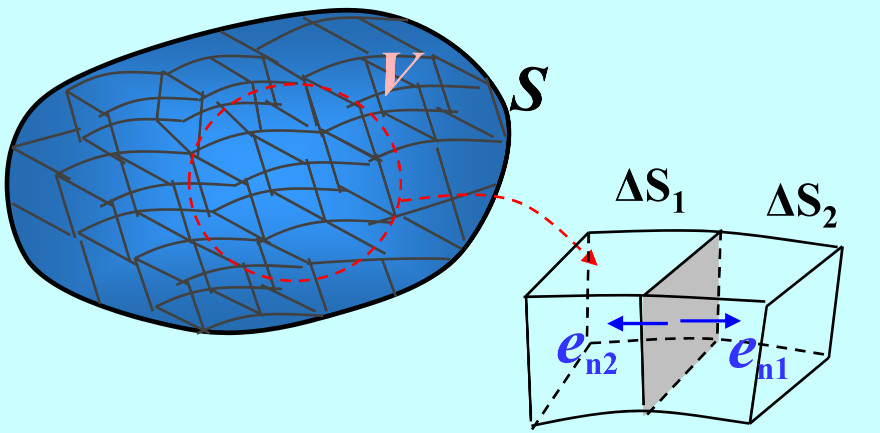
$$\int_V \nabla\cdot\vec{A}dV = \lim_{\max(\Delta V_i\to 0)}\left\{\sum_i(\nabla\cdot\vec{A})_i\Delta V_i\right\}$$

由积分定义

$$= \lim_{\max(\Delta V_i\to 0)}\left\{\sum_i\oint_{\Delta S_i}\vec{A}\cdot d\vec{S}\right\} = \oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S}$$

由散度定义

V内相互抵消

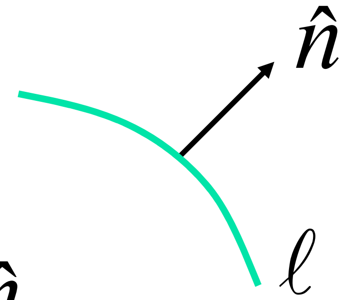


体积的剖分

2、矢量场的通量和散度

④ 平面矢量场的通量和散度

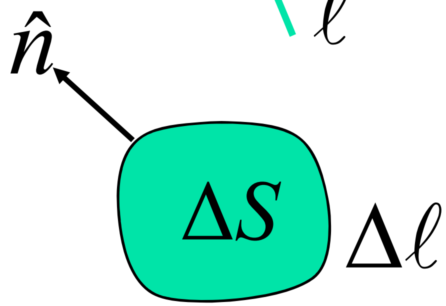
$$\vec{A}(\vec{r}) = A_x(x,y)\hat{x} + A_y(x,y)\hat{y}$$

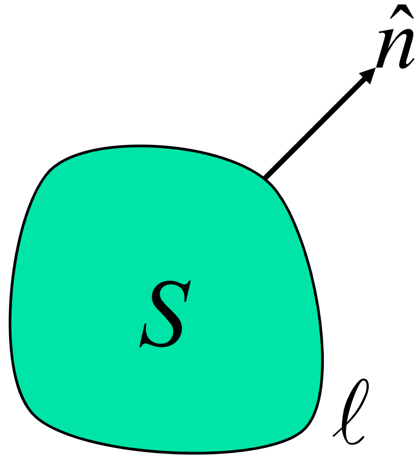


通量： $$\Phi = \int_\ell \vec{A}\cdot\hat{n}d\ell$$

散度： $$div\vec{A} = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_{\Delta\ell}\vec{A}\cdot\hat{n}d\ell}{\Delta S}$$

$$= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} = \nabla_t\cdot\vec{A}$$





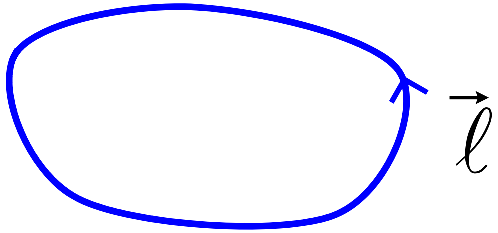
Gauss 定理： $$\int_S \nabla_t\cdot\vec{A}dS = \oint_\ell \vec{A}\cdot\hat{n}d\ell$$

3、矢量场的环量、涡量及旋度

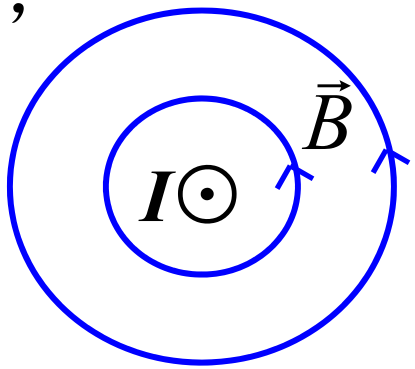
① 环量

矢量场沿某一闭合曲线的线积分，称为该矢量场沿此闭合曲线的环量。

$$\Gamma = \oint_{\ell} \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$$



例：若 $\vec{A}$为力，则Γ为功；若$\vec{A}$为$\vec{E}$，则Γ为电动势。

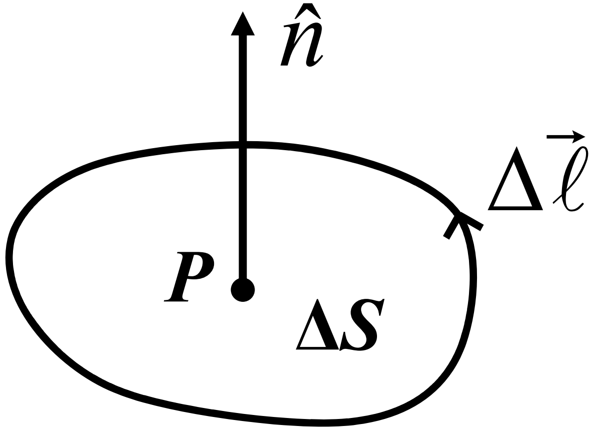


若Γ≠0，回路中必有产生这种场的旋涡源。例：静磁场。

3、矢量场的环量、涡量及旋度

② 涡量（或环量面密度）

$$\Omega = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_{\Delta \ell} \vec{A} \cdot d\vec{\ell}}{\Delta S}$$



称为矢量场$\vec{A}$在P点绕$\hat{n}$方向的涡量。

$$\Omega = rot\vec{A} \cdot \hat{n}$$

$\hat{n}$保持不变，ΔS垂直于$\hat{n}$，$\Delta\vec{\ell}$和$\hat{n}$的方向符合右手法则。

3、矢量场的环量、涡量及旋度

③ 旋度

矢量场在某点的旋度为一矢量。其大小为该点涡量的最大值，其方向为使得该点涡量取最大值的方向。

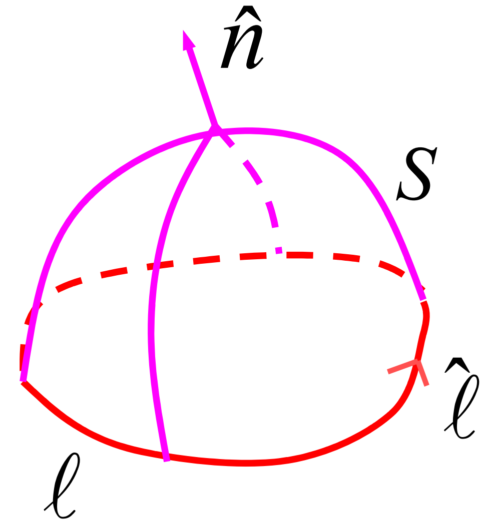
$$rot\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \nabla \times \vec{A}$$

rotation

3、矢量场的环量、涡量及旋度

④ Stokes定理

$$\int_S (\nabla\times\vec{A})\cdot d\vec{S} = \oint_\ell \vec{A}\cdot d\vec{\ell}$$



若令S为$\Delta S\to 0$

$$\Longrightarrow (\nabla\times\vec{A})\cdot\hat{n}\Delta S \approx \oint_{\Delta\ell}\vec{A}\cdot d\vec{\ell}$$

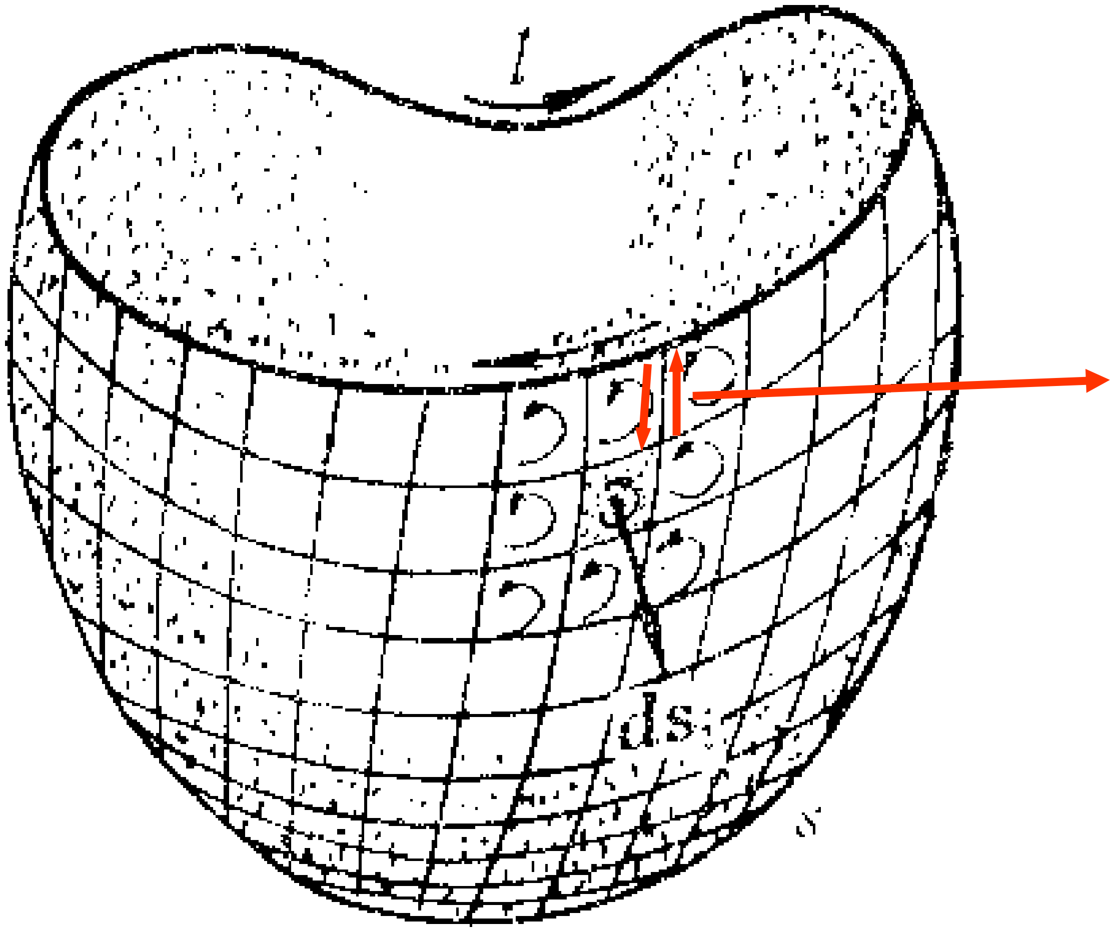
$$\Longrightarrow (\nabla\times\vec{A})\cdot\hat{n} \approx \frac{\oint_{\Delta\ell}\vec{A}\cdot d\vec{\ell}}{\Delta S}$$

备注：以ℓ为底的S形状可任意变化。

Stokes定理实际上将在任意点涡量或旋度定义所规定的与环量的关系推广至任意曲面或闭合回路。

3、矢量场的环量、涡量及旋度

【证】：　（作业）



大小相等
方向相反
相互抵消

3、矢量场的环量、涡量及旋度

⑤ 平面矢量场的环量、涡量及旋度

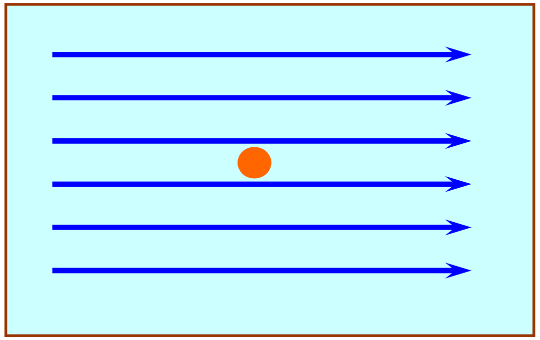
- 环量、涡量及旋度的定义与三维情形相同。限制：$dS=dxdy$，$\hat{n}=\hat{z}$，$\hat{\ell}\perp\hat{z}$。
- **Stokes**定理：$\int_S (\nabla_t \times \vec{A})\cdot\hat{z}dS=\oint_\ell \vec{A}\cdot d\vec{\ell}$

4、矢量场的场源(小结)

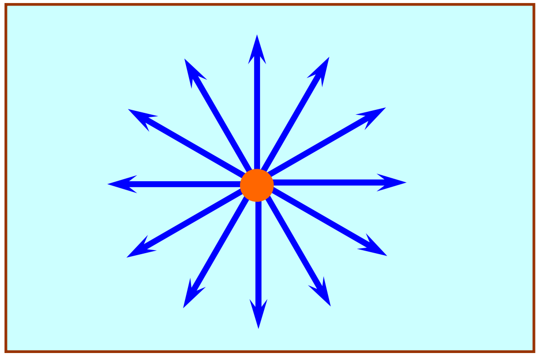
- **通量源：** 能发出或汇聚矢量线，使得矢量线发生中断或不连续。其分布或密度可由散度这一标量描述。空间任意点的散度等于矢量场在该点单位体积所对应表面的通量。
- **旋涡源：** 能使矢量线具有涡旋特性。其分布或密度可由旋度这一矢量描述。任意点的旋度在某个方向的投影或分量等于矢量场沿该点垂直于该方向单位面积所对应的闭合曲线的环量。

矢量场是否还有其它场源 ?

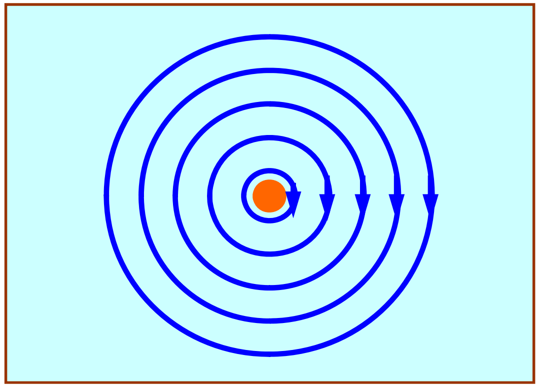
4、矢量场的场源(小结)



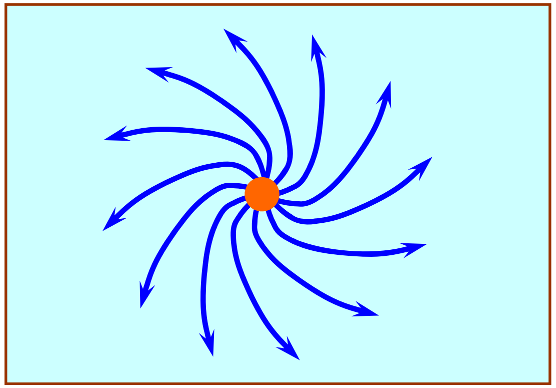
$$\nabla\cdot\vec{F}=0,\nabla\times\vec{F}=0$$



$$\nabla\cdot\vec{F}\neq0.\nabla\times\vec{F}=0$$



$$\nabla\cdot\vec{F}=0,\nabla\times\vec{F}\neq0$$



$$\nabla\cdot\vec{F}\neq0,\nabla\times\vec{F}\neq0$$

§1.2 无旋场、无散场及矢量场的分解

一、无旋场

定义：

若矢量场$\vec{A}$在区域 V 内，

- 旋度处处为零，即$\nabla \times \vec{A} \equiv 0$，则称$\vec{A}$为 V 内的无旋场；
- 沿任意闭合回路的环量为零，即 $\oint_{\ell} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} \equiv 0$，则称$\vec{A}$为 V 内的保守场；
- 可表为$\vec{A} = \nabla \varphi$，则称$\vec{A}$为 V 内的有势场。

性质：

（1） 有势场 $\Leftrightarrow$ 保守场；

（2） 有势场 $\Rightarrow$ 无旋场

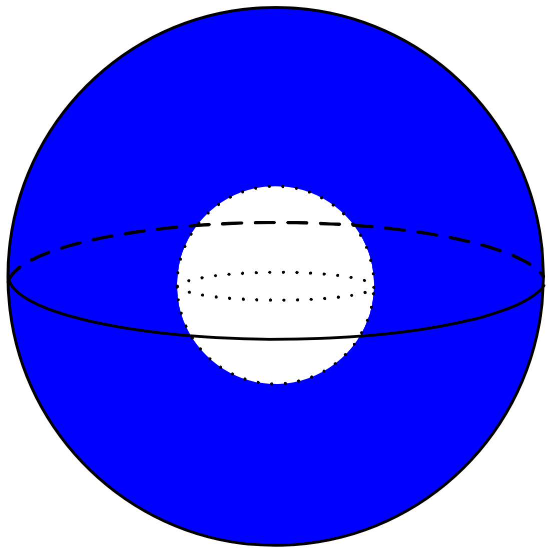
$$\because \nabla \times (\nabla \varphi) \equiv 0$$

（3） 若 V 曲面单连通区域，无旋场 $\Rightarrow$有势场

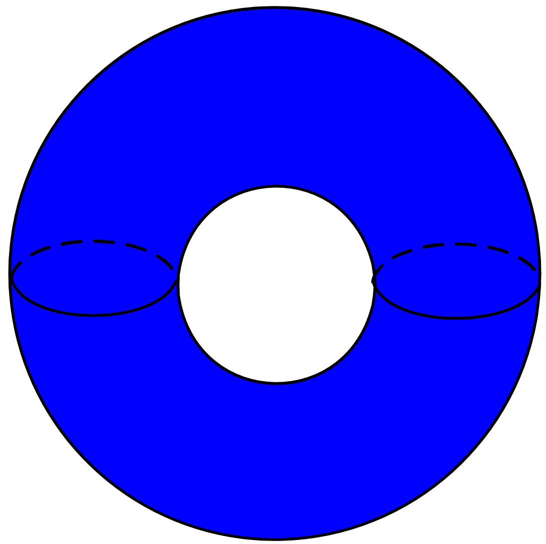
曲面单连通：对区域 V 内任何一条简单闭曲线 ℓ，均可作出一个以 ℓ为边界且全部位于 V 内的曲面 S，即 V 内任一闭合回路均可收缩为一点。

$$\oint_{\ell \in V} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\exists S \in V} (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = 0$$

例：曲面单连通区域



空心球体，是。



环面体，不是。

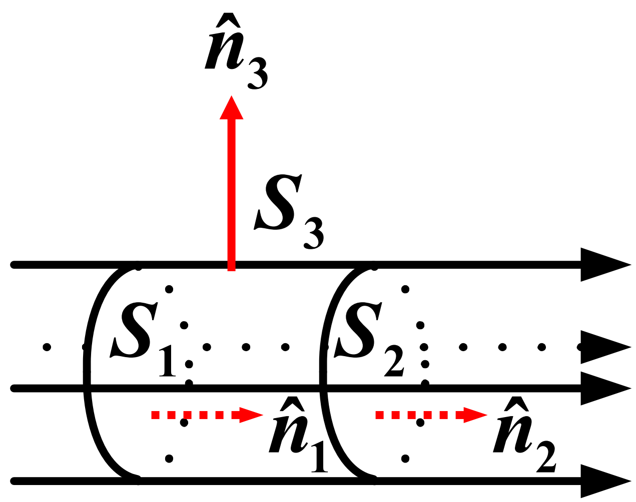
§ 1.2 无旋场、无散场及矢量场的分解

二、无散场

定义： 若矢量场 $\vec{A}$ 在区域 V 内散度处处为零，即 $\nabla \cdot \vec{A} \equiv 0$，则称 $\vec{A}$ 为 V 内的无散场或管形场。

为何称为管形场 ?

矢量管：矢量线构成的管形曲面（矢量线与矢量管的侧面重合）。



§ 1.2 无旋场、无散场及矢量场的分解

对于无散场，有

$$\oint_{S=S_1+S_2+S_3} \vec{A}\cdot d\vec{S} = \int_V \nabla\cdot\vec{A}dV = 0$$

$$\Longrightarrow \quad -\int_{S_1} \vec{A}\cdot\hat{n}_1 dS + \int_{S_2} \vec{A}\cdot\hat{n}_2 dS + \int_{S_3} \vec{A}\cdot\hat{n}_3 dS = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \int_{S_1} \vec{A}\cdot\hat{n}_1 dS = \int_{S_2} \vec{A}\cdot\hat{n}_2 dS$$

$\Longrightarrow$ 无散场在矢量管任意横截面上的通量相等。

例：水在无散的流速场中的流动。

性质：

（1） 若矢量场 $\vec{A}$在区域 V 内可表为$\vec{A}=\nabla\times\vec{B}$
$\Rightarrow \vec{A}$为无散场。

$\because \nabla\cdot(\nabla\times\vec{B})\equiv 0$

备注：$\vec{B}$不唯一，$\because \vec{A}=\nabla\times(\vec{B}+\nabla\varphi)$。

（2） 若 V 为空间单连通区域，$\vec{A}$为无散场
$\Rightarrow \vec{A}$可表为$\vec{A}=\nabla\times\vec{B}$。

空间单连通：V 内任何一条简单闭曲面 S 所包含的全部点均位于 V 内，即 V 内没有“洞”。

例：空心球体，不是。环面体，是。

- 关于Stokes定理的思考题

§ 1.2 无旋场、无散场及矢量场的分解

三、矢量场的分解

任意矢量场 $\vec{A}$ 可表为一个无旋场 $\vec{A}_i$ 和一个无散场 $\vec{A}_s$ 的迭加，即

$$\vec{A} = \vec{A}_i + \vec{A}_s$$

***i**rrotational*

***s**olenoidal*

其中，

$\nabla \times \vec{A}_i = 0$，$\vec{A}_i$ 代表单独由通量源产生的场；

$\nabla \cdot \vec{A}_s = 0$，$\vec{A}_s$ 代表单独由旋涡源产生的场。

已知矢量场在 V 内的场源，即散度和旋度，能否在 V 内唯一确定该矢量场？

§ 1.3 ∇算子的运算

二个矢量代数公式：

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{B}\cdot\vec{A})\vec{C}$$

或 $$(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{C}\cdot\vec{B})\vec{A}$$

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})=\vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$$

或 $$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}=(\vec{B}\times\vec{C})\cdot\vec{A}=(\vec{C}\times\vec{A})\cdot\vec{B}$$

记忆！

§1.3 ▽算子的运算

一、一阶▽算子的运算

$$\nabla = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}$$

T(▽)：包含▽算子的表达式且对▽ 呈线性。

性质：

1)对于任何**T(▽)**，可将▽看作普通矢量进行矢量代数的恒等变换，所得结果不变。但在变换中不能改变▽算子对每个函数的作用性。必要时对不受▽算子作用的函数（包括微分时视为常数的函数）加注下标 c，以示其被视为常数。

§1.3 ▽算子的运算

2)如果T(▽)中▽的后面有二个函数相乘（包括数乘、点乘和叉乘）且它们都受到▽算子的作用，则T(▽)可表为二项之和：在一项中，其中一个函数视为常数，不受▽算子的作用；而在另一项中，另一个函数视为常数，不受▽算子的作用。

要点：▽为一矢量微分算子，合法的运算必须既符合矢量代数运算规则，又符合微分运算规则，其必须兼顾其矢量特性和微分特性。

§ 1.3 ∇算子的运算

例 1：$\nabla(\varphi\psi)=\varphi\nabla\psi+\psi\nabla\varphi$

例 2：$\nabla\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{b}\cdot(\nabla\times\vec{a})-\vec{a}\cdot(\nabla\times\vec{b})$

例 3：

$$\begin{aligned}\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B})&=\vec{A}(\nabla\cdot\vec{B})-(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}\\&=+(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}-\vec{B}(\nabla\cdot\vec{A})\end{aligned}$$

例 4：$\nabla(\vec{a}\cdot\vec{p})=(\vec{a}\cdot\nabla)\vec{p}$。其中，$\vec{a}$为常矢量，

$\nabla\times\vec{p}=0$。

例 5：$(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V}=\dfrac{1}{2}\nabla(\vec{V}\cdot\vec{V})-\vec{V}\times(\nabla\times\vec{V})$

§ 1.3 ▽算子的运算

二、二阶▽算子的运算

$$\nabla^2\varphi \qquad \nabla^2\vec{A} \qquad \nabla\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})$$

$$\nabla^2 = \nabla\cdot\nabla$$

T(▽, ▽)：包含二阶▽算子的表达式且对每个▽算子呈线性。

运算规则：

T(▽, ▽) → T(∇_1, ∇_2) → 运算结束后，$\nabla_1 = \nabla_2 = \nabla$

§ 1.3 ∇算子的运算

例 1： $\nabla^2(\varphi\psi)=\varphi\nabla^2\psi+2\nabla\varphi\cdot\nabla\psi+\psi\nabla^2\varphi$

例 2： $\nabla^2(\varphi\vec{A})=\varphi\nabla^2\vec{A}+2(\nabla\varphi\cdot\nabla)\vec{A}+\vec{A}\nabla^2\varphi$

$\nabla^2(\varphi\vec{A})=(\nabla_1\cdot\nabla_2)(\varphi\vec{A})$ ——并矢

例 3： $\nabla\times(\nabla\times\vec{A})=\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}$

并矢： $\vec{A}\vec{B}$

$$\vec{C}\cdot(\vec{A}\vec{B})=(\vec{C}\cdot\vec{A})\vec{B}\to\vec{C}\cdot\vec{A}\vec{B}$$

$$(\vec{A}\vec{B})\cdot\vec{C}=\vec{A}(\vec{B}\cdot\vec{C})\to\vec{A}\vec{B}\cdot\vec{C}$$

§ 1.4 积分定理

一、Gauss类（Gauss定理及可由其证明的定理）

① Gauss 定理：

$$\int_V \nabla \cdot \vec{A} dV = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} \qquad (1\text{-}81)$$

$$\int_S \nabla_t \cdot \vec{A} dS = \oint_\ell \vec{A} \cdot \hat{n} d\ell \qquad \text{（平面场）}$$

② 标量格林定理

第一定理： (1-85)

$$\int_V (\varphi \nabla^2 \psi + \nabla \varphi \cdot \nabla \psi) dV$$

$$= \oint_S \varphi \nabla \psi \cdot d\vec{S} = \oint_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS$$

第二定理： (1-86)

$$\int_V (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi) dV$$

$$= \oint_S (\varphi \nabla \psi - \psi \nabla \varphi) \cdot d\vec{S}$$

$$= \oint_S (\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}) dS$$

§ 1.4 积分定理

③ 矢量格林定理

第一定理：

$$\int_V [(\nabla\times\vec{A})\cdot(\nabla\times\vec{B}) - \vec{A}\cdot(\nabla\times\nabla\times\vec{B})]dV$$

$$= \oint_S [\vec{A}\times(\nabla\times\vec{B})]\cdot d\vec{S} \qquad (1\text{-}87a)$$

第二定理：

$$\int_V [\vec{B}\cdot(\nabla\times\nabla\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\nabla\times\nabla\times\vec{B})]dV$$

$$= \oint_S [\vec{A}\times(\nabla\times\vec{B}) - \vec{B}\times(\nabla\times\vec{A})]\cdot d\vec{S} \qquad (1\text{-}88)$$

§ 1.4 积分定理

④ 其它：

$$\int_V \nabla \times \vec{A} dV = \oint_S \hat{n} \times \vec{A} dS \qquad (1\text{-}90)$$

$$\int_V \nabla \varphi dV = \oint_S \hat{n} \varphi dS \qquad (1\text{-}91)$$

$$\int_V [\vec{B}(\nabla \cdot \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B}] dV = \oint_S (\hat{n} \cdot \vec{A}) \vec{B} dS \qquad (1\text{-}92)$$

§ 1.4 积分定理

二、Stokes类（Stokes定理及可由其证明的定理）

Stokes 定理：

$$\int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \oint_\ell \vec{A} \cdot d\vec{\ell} \qquad (1\text{-}82)$$

$$\int_S (\nabla_t \times \vec{A}) \cdot \hat{z} dS = \oint_\ell \vec{A} \cdot d\vec{\ell} \quad \text{（平面场）} \qquad (1\text{-}84)$$

其它：

$$\int_S \hat{n} \times \nabla \varphi dS = \oint_\ell \varphi d\vec{\ell}$$

$$\int_S (\hat{n} \times \nabla) \times \vec{A} dS = -\oint_\ell \vec{A} \times d\vec{\ell}$$

§ 1.5 δ函数

一、δ函数的定义及基本性质

①一维

定义：

1）$\delta(x-x_0)=\begin{cases}\infty, & x=x_0\\ 0, & x\neq x_0\end{cases}$

2）$\int_a^b \delta(x-x_0)dx=1, \quad x_0\in(a,b)$

（$=0, \quad x_0\notin[a,b]$）

性质：

$$\delta(x-x_0)=\delta(x_0-x)$$

$$\int_a^b \delta(x-x_0)f(x)dx=\begin{cases}f(x_0), & x_0\in(a,b)\\ 0, & x_0\notin[a,b]\end{cases}$$

§ 1.5 δ函数

②三维

定义：

1） $\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)=\begin{cases}\infty, & \vec{r}=\vec{r}_0 \\ 0, & \vec{r}\neq\vec{r}_0\end{cases}$

2） $\int_V \delta(\vec{r}-\vec{r}_0)dV=1, \quad \vec{r}_0\in V$(开域)

（$=0, \quad \vec{r}_0\notin V$(闭域)）

性质：

$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)=\delta(\vec{r}_0-\vec{r})$

$$\int_a^b \delta(\vec{r}-\vec{r}_0)f(\vec{r})dV=\begin{cases}f(\vec{r}_0), & \vec{r}_0\in V(\text{开域}) \\ 0, & \vec{r}_0\notin V(\text{闭域})\end{cases}$$

§ 1.5 δ函数

二、δ函数在正交曲线坐标系下的表达式

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)=\frac{1}{h_1h_2h_3}\delta(u_1-u_1^0)\delta(u_2-u_2^0)\delta(u_3-u_3^0)$$

$$\vec{r}_0=(u_1^0,u_2^0,u_3^0)$$

【验证】:

1) $\vec{r}=\vec{r}_0$时;　　2) $\vec{r}\neq\vec{r}_0$时;　　3)

$$\int_V\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)dV=\int_V\delta(u_1-u_1^0)\delta(u_2-u_2^0)\delta(u_3-u_3^0)du_1du_2du_3$$

参见(3-164)-(3-166)

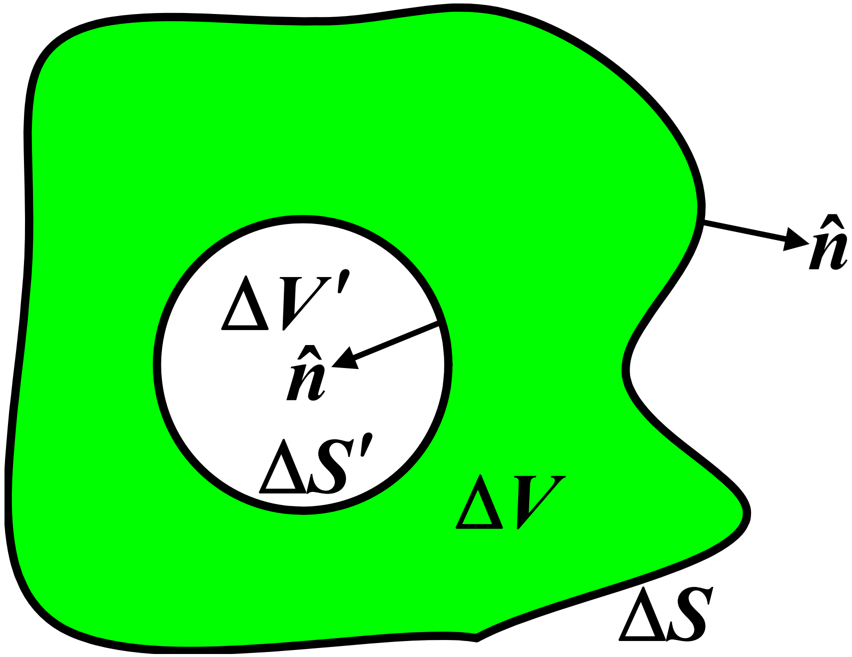
直角坐标系：$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)$

§ 1.5 δ函数

三、二个常用公式

$$(1)\quad -\nabla^2\frac{1}{r}=\nabla\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)=4\pi\delta(\vec{r})$$

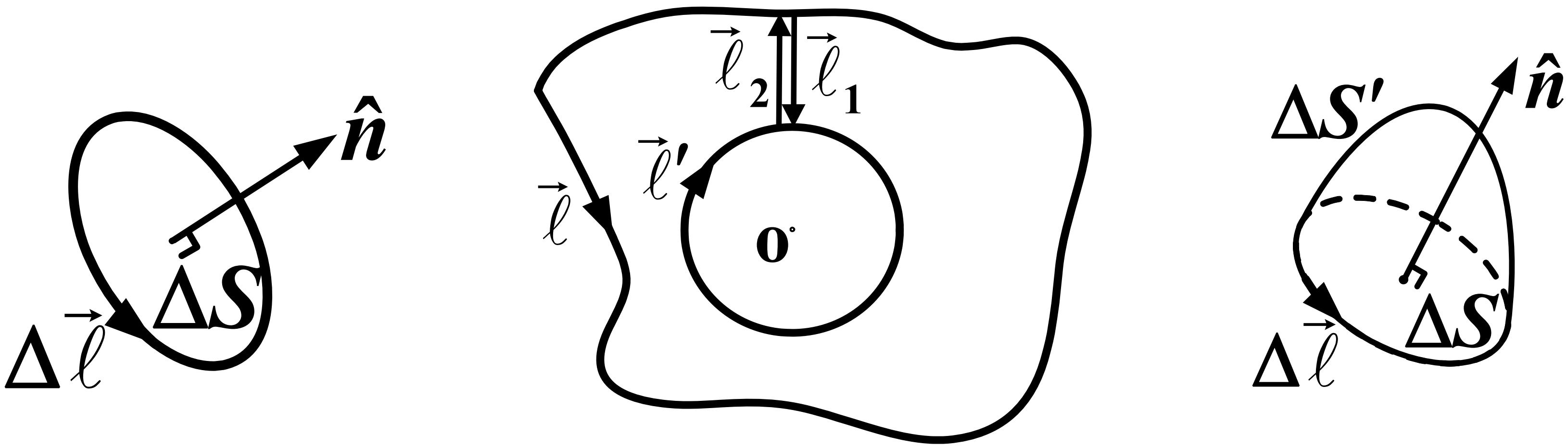
【证】

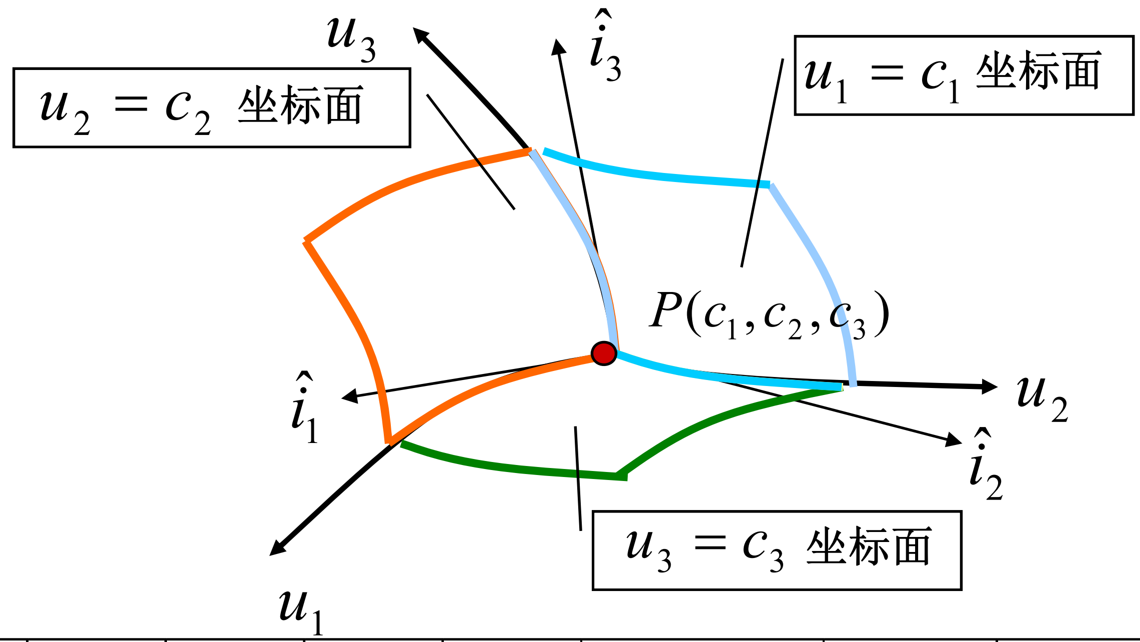


§ 1.5 δ函数

(2) $\nabla \times \left(\dfrac{\vec{r}}{r^3} \right) = 0$

【证】





	u_1	u_2	u_3	h_1	h_2	h_3	$\hat{i}_1$	$\hat{i}_2$	$\hat{i}_3$
直角坐标系	x	y	z	1	1	1	$\hat{i}_x$	$\hat{i}_y$	$\hat{i}_z$
柱坐标系	ρ	φ	z	1	ρ	1	$\hat{i}_\rho$	$\hat{i}_\varphi$	$\hat{i}_z$
球坐标系	r	θ	φ	1	r	$r\sin\theta$	$\hat{i}_r$	$\hat{i}_\theta$	$\hat{i}_\varphi$